

مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

أولا : الجبـــــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) ${}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,........\,(ن-ر+١)$ لكل ر ⩽ ن ، ر ، ن ∈ ص+

(٢) ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

(٣) $\underline{|١} = \underline{|٠} = ١$

(٤) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}}$

(٥) ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

(٦) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

(٧) إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أ، س + ص = ن

(٨) $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

(٩) ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

(١٠) $(س+أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\,س^{ن-١}\,أ + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{ن-٢}\,أ^{٢} + ... + أ^{ن}$

$(س-أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\,س^{ن-١}\,أ + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{ن-٢}\,أ^{٢} - .... + (-أ)^{ن}$

(١١) $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٢) $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(س+أ)^{ن}$]

(١٣) $(١ \pm س)^{ن} = ١ \pm {}^{ن}ق_{١}\,س + {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} \pm {}^{ن}ق_{٣}\,س^{٣} + ... (\pm س)^{ن}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(س+أ)^{ن}$ هو $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\,س^{ن-ر}\,أ^{ر}$

الحد الأوسط في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجية يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\frac{ن+٢}{٢}$

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$ $= \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{أ}{س}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$

$$= \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

العدد المركب : لكل س ، ص ∈ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $ت^{٢} = -١$

مرافق العدد المركب : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{ع}$ = س – ص ت

و يكون ع + $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا ، ع $\overline{ع}$ = عدداً حقيقيا

خواص المرافق : (١) $\overline{(ع_{١} + ع_{٢})} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$

(٢) $\overline{(ع_{١} ع_{٢})} = (\overline{ع_{١}}) (\overline{ع_{٢}})$

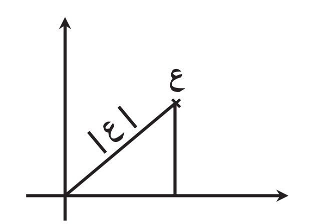
(٣) $\overline{\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} \right)} = \left(\frac{\overline{ع_{١}}}{\overline{ع_{٢}}} \right)$

التمثيل الهندسي للعدد المركب : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

المقياس و السعة للعدد المركب : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند

فإن | ع | = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \frac{س}{ل}$ ، جا $\theta = \frac{ص}{ل}$

خواص المقياس و السعة للعدد المركب :



(١) | ع | = | $\overline{ع}$ | (٢) ع $\overline{ع}$ = $| ع |^{٢} = | \overline{ع} |^{٢}$

(٣) | ع$_{١}$ ع$_{٢}$ | = | ع$_{١}$ | | ع$_{٢}$ |

(٤) $\left| \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} \right| = \frac{| ع_{١} |}{| ع_{٢} |}$

(٥) | ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ | ⩽ | ع$_{١}$ | + | ع$_{٢}$ |

(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

(٧) السعة التي تنتمي للفترة] $-\pi$ ، π] تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\bar{ع}$ = $-$ سعة ع

(٩) سعة ($-$ ع) = $-\pi$ + سعة ع　　　(١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = $-$ سعة ع

الصورة المثلثية للعدد المركب : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية :

إذا كان : $ع_١$ = $ل_١$ (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $ع_٢$ = $ل_٢$ (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$)

فإن : $ع_١$ $ع_٢$ = $ل_١$ $ل_٢$ (جتا ($\theta_١ + \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ + \theta_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($\theta_١ - \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ - \theta_٢$))

الصورة الاسية للعدد المركب : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = جتا θ $-$ ت جا θ = جتا($-\theta$) + ت جا ($-\theta$)

نظرية ديموافر : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) (جتا θ + ت جا θ)^ن = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$)

أي أن مقدار (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك

من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، $-$ ٢ ، $-$ ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$

محصورة بين $-\pi$ ، π

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : إذا كان ع^٣ = ١ فإن ع $\in$ { ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت }

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) $\omega^٣$ = ١　　(٢) ١ + ω + $\omega^٢$ = صفر　　(٣) $\omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{٣}$ ت

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^ن = ١$

فإن $ع = (جتا ٠^\circ + ت جا ٠^\circ)^{\frac{١}{ن}} = جتا \frac{٢ \pi ك}{ن} + ت جا \frac{٢ \pi ك}{ن}$ حيث $ك \in ص$ ، $\frac{٢ \pi ك}{ن} \in] -\pi ، \pi]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند برؤوس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة ﻫ يتكون من ﻫ من الصفوف ، ﻫ من الأعمدة و ينشأ من حذف (ﻫ – ١) من المتغيرات في ﻫ من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الأتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – ١ × قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $| أ | \neq$ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $أ^{مل}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-١} = \frac{١}{| أ |} \times أ^{مل}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، س هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : $س = أ^{-١} \times ب$

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ≤ ر (أ) ≤ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ* حيث :

أ* = (أ | ب) و هي على النظم م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ ▭

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي " إذا كان ر (أ) = ر (أ*) = ك حيث ك < ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ*)

المعادلات المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = ▭ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

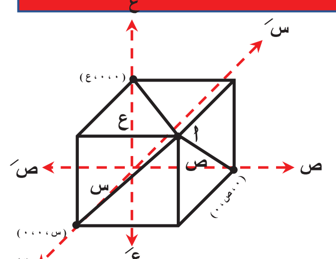
- ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد

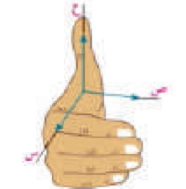
النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد :

تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات



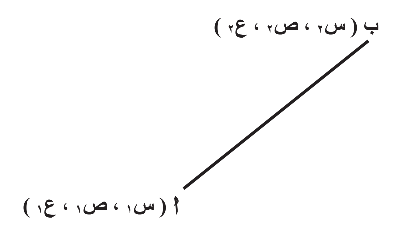
قاعدة اليد اليمنى :

و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع



مستويات الاحداثيات :

- المستوي س ص و معادلته ع = صفر
- المستوي س ع و معادلته ص = صفر
- المستوي ص ع و معادلته س = صفر



البعد بين نقطتين فى الفراغ :

إذا كانت أ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) ، ب (س_2 ، ص_2 ، ع_2)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ يعطى بالعلاقة :

$$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) ، ب (س_2 ، ص_2 ، ع_2)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

فإن جـ $\left(\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} ، \dfrac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} \right)$

معادلة الكرة فى الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نق تكون :

$$(\text{س} - \text{ل})^2 + (\text{ص} - \text{ك})^2 + (\text{ع} - \text{ن})^2 = \text{نق}^2$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نق تكون : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = \text{نق}^2$
- معادلة الكرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + 2\,\text{ل س} + 2\,\text{ك ص} + 2\,\text{ن ع} + \text{ء} = 0$

حيث مركزها (– ل ، – ك ، – ن) ، و طول نصف قطرها (نق) = $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 - \text{ء}}$

حيث $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 > \text{ء}$

متجه الموضع فى الفراغ :

إذا كانت أ ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$)

- $\text{أ}_{\text{س}}$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور س
- $\text{أ}_{\text{ص}}$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور ص
- $\text{أ}_{\text{ع}}$ تسمي مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه محور ع

معيار المتجه :

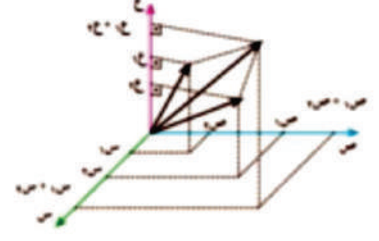
إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^2 + \text{أ}_{\text{ص}}^2 + \text{أ}_{\text{ع}}^2}$



جمع و طرح المتجهات فى الفراغ :



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{ب}_{\text{ع}}$) فإن :



- $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}} + \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} + \text{ب}_{\text{ع}}$)
- $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = ($\text{أ}_{\text{س}} - \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} - \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} - \text{ب}_{\text{ع}}$)

خواص عملية الجمع :

(١) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \in \text{ع}^{٣}$ خاصية الانغلاق

(٢) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}$ خاصية الابدال

(٣) $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{جـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}})$ خاصية التجميع

(٤) $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{أ}}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\overleftarrow{\text{أ}} + (-\overleftarrow{\text{أ}}) = (-\overleftarrow{\text{أ}}) + \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{و}}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه في عدد حقيقي :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، ك $\in$ ع فإن ك $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{ك أ}_{\text{س}} ، \text{ك أ}_{\text{ص}} ، \text{ك أ}_{\text{ع}})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

متجه الوحدة :

هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\overleftarrow{\text{س}} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\overleftarrow{\text{ص}} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\overleftarrow{\text{ع}} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ على الصورة : $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}}$

التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

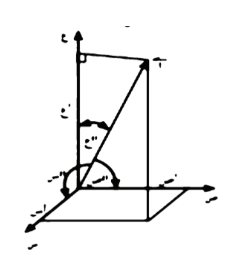
إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$

على الترتيب فإن $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$

متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإن متجه $\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \frac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$$



زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

إذا كانت $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$

مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

- $\overleftarrow{أ}_{س} = \| \overleftarrow{أ} \|$ جتا $\theta_{س}$ ، $\overleftarrow{أ}_{ص} = \| \overleftarrow{أ} \|$ جتا $\theta_{ص}$ ، $\overleftarrow{أ}_{ع} = \| \overleftarrow{أ} \|$ جتا $\theta_{ع}$

($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) تسمى بزوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$

- جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$ تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{أ}$
- جتا $\theta_{س}\, \overleftarrow{س}$ + جتا $\theta_{ص}\, \overleftarrow{ص}$ + جتا $\theta_{ع}\, \overleftarrow{ع}$ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\overleftarrow{أ}$
- و يكون : جتا$^2 \theta_{س}$ + جتا$^2 \theta_{ص}$ + جتا$^2 \theta_{ع}$ = ١

الضرب القياسي لمتجهين :

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين في ع^3 قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ ≤ θ ≤ ١٨٠° فإن :

$$\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \| \text{ جتا } \theta$$

خواص الضرب القياسي لمتجهين :

(١) $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ب} \cdot \overleftarrow{أ}$ خاصية الابدال

(٢) $\overleftarrow{أ} \cdot (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) = \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن (ك $\overleftarrow{أ}$) $\cdot \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \cdot$ (ك $\overleftarrow{ب}$) = ك ($\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$)

(٤) $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{أ} = \| \overleftarrow{أ} \|^2$

(٥) إذا كان $\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}$ = صفر فإن $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$ حيث $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين

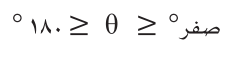
الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثى متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) ، $\overleftarrow{ب}$ = ($ب_{س}$ ، $ب_{ص}$ ، $ب_{ع}$)

فإن : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} = أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع}$


الزاوية بين متجهين :

$$\therefore \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \| \| \overleftarrow{ب} \|}$$


، صفر° ≤ θ ≤ ١٨٠°

- إذا كانت جتا θ = ١ فإن $\overleftarrow{أ} \,//\, \overleftarrow{ب}$ و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = −١ فإن $\overleftarrow{أ} \,//\, \overleftarrow{ب}$ و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن $\overleftarrow{أ} \perp \overleftarrow{ب}$

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :

$\therefore$ مركبة المتجه $\overleftarrow{أ}$ في اتجاه $\overleftarrow{ب}$

$$\overleftarrow{أ}_{ب} = \| \overleftarrow{أ} \| \text{ جتا } \theta$$

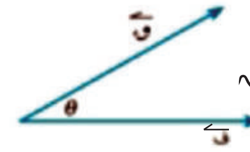
$$\overleftarrow{أ}_{ب} = \frac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{ب} \|}$$

|| أ || جتا

المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$:

$$= \left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|^{٢}} \right) \overrightarrow{ب}$$

الشغل المبذول من قوة $\overrightarrow{ق}$ لإحداث إزاحة $\overrightarrow{ف}$:



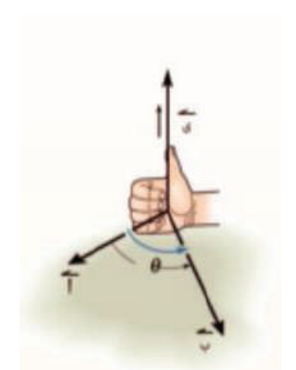
إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overrightarrow{ف}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{ق}$ قد بذلت شغلا ش

الشغل = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$ جتا θ

- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في نفس اتجاه الازاحة (θ = صفر°) ش = $\|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ في عكس اتجاه الازاحة (θ = ١٨٠°) ش = $-\|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الازاحة (θ = ٩٠°) ش = صفر

الضرب الاتجاهى لمتجهين:



إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين في ع^{٣} ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جا $\theta) \, \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي

على مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم لأسفل)

طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه

الدوران من $\overrightarrow{أ}$ إلي المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overrightarrow{ى}$

خواص الضرب الاتجاهى لمتجهين :

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$

(٢) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$

(٣) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإما $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overrightarrow{و}$

(٥) $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في نظام احداثي متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهي في مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$

فإن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \\ ب_س & ب_ص \end{vmatrix} \overleftarrow{ع} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \overleftarrow{ع}$

متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$:

$$\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|}$$

توازي متجهين :

المتجهان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

(٢) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(٣) $\overleftarrow{أ} = ك \overleftarrow{ب}$ إذا كانت ك > ٠ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت ك < ٠ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي :

$\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثي القياسي :

$$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

المعنى الهندسي للضرب الثلاثي القياسي :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ}$

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overleftarrow{ه}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overleftarrow{ه}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = – ٤ (ل ، م ، ن) =..............

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) و المتجه $\overleftarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ر}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) + ك (أ ، ب ، جـ)
- المعادلات البارمترية : س = س$_١$ + ك أ ، ص = ص$_١$ + ك ب ، ع = ع$_١$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\frac{\text{س} - \text{س}_١}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_١}{\text{جـ}}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{ه}_١$ ، $\overleftarrow{ه}_٢$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overleftarrow{ه}_١ \cdot \overleftarrow{ه}_٢|}{\|\overleftarrow{ه}_١\|\,\|\overleftarrow{ه}_٢\|}$$

و إذا كان (ل$_١$ ، م$_١$ ، ن$_١$) ، (ل$_٢$ ، م$_٢$ ، ن$_٢$) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$\text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_١\text{ل}_٢ + \text{م}_١\text{م}_٢ + \text{ن}_١\text{ن}_٢|$$

شرط توازي و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overleftarrow{ه}_١$ = (أ$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١$) ، $\overleftarrow{ه}_٢$ = (أ$_٢$ ، ب$_٢$ ، جـ$_٢$) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

$\overleftarrow{ه}_١$ = ك $\overleftarrow{ه}_٢$ أ، $\overleftarrow{ه}_١ \times \overleftarrow{ه}_٢ = \overleftarrow{و}$ أ، $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{\text{جـ}_١}{\text{جـ}_٢}$

- المستقيمين متعامدان إذا كان :

أ$_١$ أ$_٢$ + ب$_١$ ب$_٢$ + جـ$_١$ جـ$_٢$ = صفر

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) و المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوى هي :

- الصورة المتجهة : $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot$ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$)
- الصورة القياسية : أ (س – س$_١$) + ب (ص – ص$_١$) + جـ (ع – ع$_١$) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + و = صفر ، حيث و = -أ س$_١$ - ب ص$_١$ - جـ ع$_١$

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{ن_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس

الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{|\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢}|}{||\overleftarrow{ن_١}|| \, ||\overleftarrow{ن_٢}||} \qquad حيث \; ٠^\circ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} // \overleftarrow{ن_٢}$ أ، $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أ، $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = صفر$

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوى :

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي المار بالنقطة ب $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

و المتجه $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{|\overleftarrow{ب أ} . \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{ن}||}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي الذي معادلته:

$أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر$ هو ل حيث:

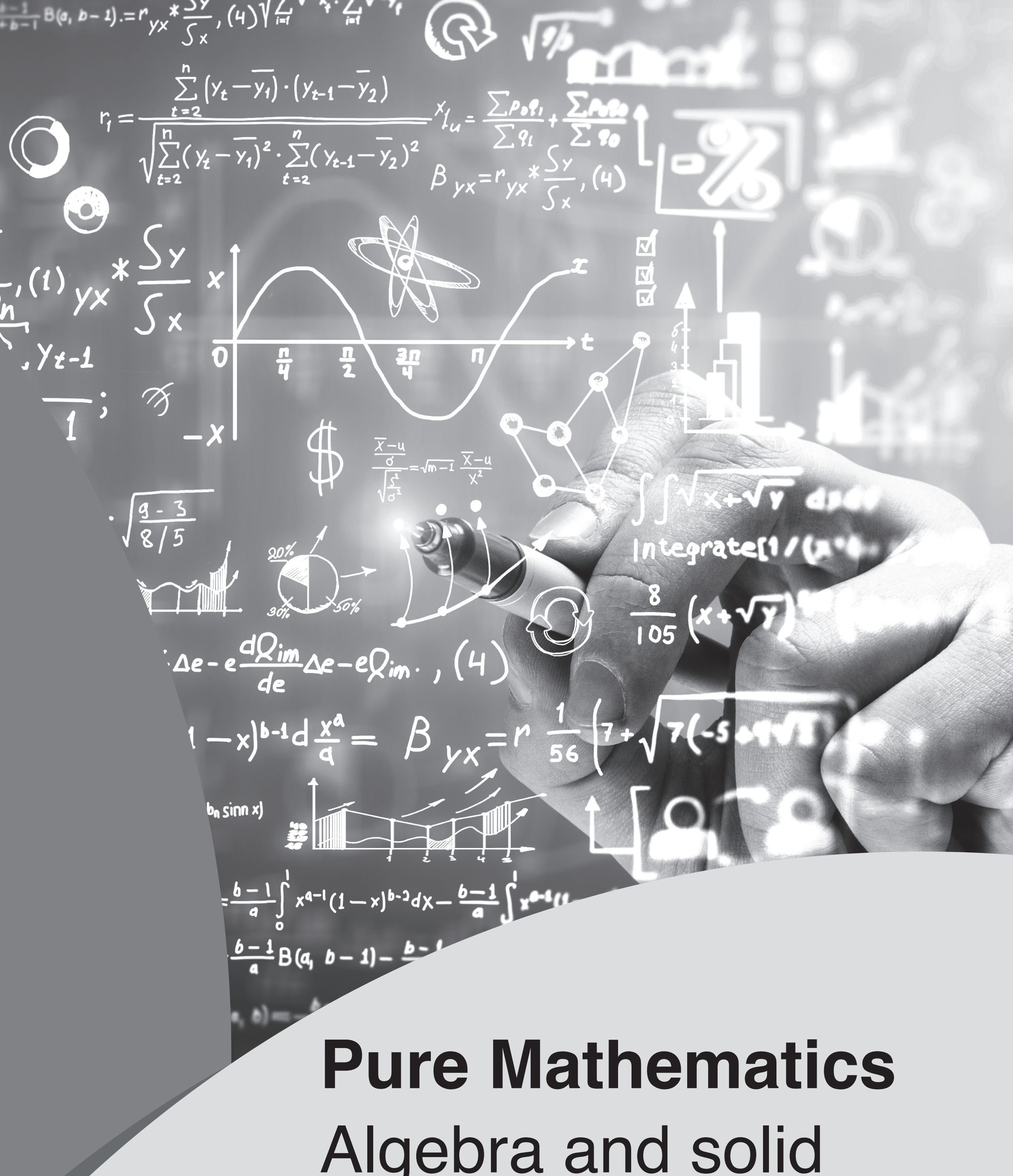
$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : $(س_١ ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ص_١ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، ع_١)$

فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$



Pure Mathematics

Algebra and solid geometry concepts

3rd Secondary

Concepts Sheet